Chapitre 3

Lois de probabilité classiques

3.1 Lois discrètes

3.1.1 Loi Binomiale

3.1.1.1 Qualification de la loi binomiale

Dans une production de pièces, avec une proportion $p \in [0,1]$ de pièces défectueuses, on prélève un échantillon de 3 pièces par tirage avec remise assurant l'indépendance des tirages. On désigne par X la VARD prenant pour valeur le nombre de pièces défectueuses de l'échantillon. On note $q = 1 - p$.
Loi de probabilité :
On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. Soient D : pour défectueux et $\overline{D}$: pour non défectueux.

$1^{er} tirage$	$2^{eme} tirage$	$3^{eme} tirage$	x_i	probabilité
$\overline{D}$	$\overline{D}$	$\overline{D}$	0	q^3
D	$\overline{D}$	$\overline{D}$	1	pq^2
$\overline{D}$	D	$\overline{D}$	1	pq^2
$\overline{D}$	$\overline{D}$	D	1	pq^2
D	D	$\overline{D}$	2	p^2q
D	$\overline{D}$	D	2	p^2q
$\overline{D}$	D	D	2	p^2q
D	D	D	3	p^3

En regroupant suivant les valeurs x_i, on obtient la loi de probabilité de la VARD X :

x_i	0	1	2	3	$\sum$
$\mathbb{P}(X = x_i)$	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3	$(p+q)^3 = 1$

3.1.1.2 Cadre et énoncé de la loi binomiale

Il s'agit d'une succession d'épreuves :
- Répétées n fois, où $n \in N^*$,
- Identiques,
- Indépendantes et à caractère dichotomique.

On s'intéresse ici au nombre k de succès parmi ces n épreuves.

Soi $\Omega_1 = \{E, S\}$, pour "échec" et "succès", avec $p = \mathbb{P}(S) \in [0,1]$ et $1 - p = \mathbb{P}(E)$. On peut définir une VARD X qui compte le nombre de succès parmi ces n épreuves.

Définition 3.1.1
La VARD X suit la loi binomiale de paramètres n et p : $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ *avec*
$\begin{cases} n = & \textit{nombres d'épreuves,} \\ p = & \textit{probabilité d'un succès} \end{cases}$ *avec* $X(\Omega) = \{0, 1, 2, ..., n\}$.
Cette loi est définie par : $\forall k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$
avec k succès et n − k échecs sur n épreuves.

Les $\mathbb{P}(X = k)$, notée p_k, sont positifs et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = \sum_{k=0}^{+\infty} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$
donc les p_k définissent une loi de probabilité.

Remarque 3.1.1
Les p_k sont les différents termes du dévelopement $(p+q)^n$ par la formule du binôme de Newton, d'où l'appellation de loi binomiale.

3.1.1.3 L'espèrance et la variance :

Proposition 3.1.1
Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ *alors :*
- $E(X) = np$
- $V(X) = npq$ *et* $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

Démonstration 1
La VARD X s'écrit sous la forme $X = X_1 + ... + X_n$ *avec* X_k *est nombre de succès du* k^{eme}*-fois.*
$$X_k = \begin{cases} 0 & \textit{si le résultat est un échec,} \\ 1 & \textit{si le résultat est un succès} \end{cases}$$
donc $E(X_k) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$
et $V(X_k) = E(X_k^2) - E(X_k)^2 = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p - p^2 = p - p^2 = pq$. *Alors*
- $E(X) = E(X_1 + ... + X_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} E(X_k) = \sum_{k=0}^{n} p = np.$
- $V(X) = V(X_1 + ... + X_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} V(X_k) = npq$, *car les* $X_1, X_2, ..., X_n$ *sont indépendantes.*

3.1.1.4 La fréquence binomiale :

Définition 3.1.2
Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ avec $p \in [0,1]$, on appelle fréquence binomiale la VARD $F = \dfrac{X}{n}$

Proposition 3.1.2
Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $F = \dfrac{X}{n}$ alors : $E(F) = p$; $V(F) = \dfrac{pq}{n}$ et $\sigma(F) = \sqrt{\dfrac{pq}{n}}$.

Démonstration 2 *Exercice*

Exemple 26
On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle événement E l'obtention sur la face supérieure 3 ou 6.
Quelle est la probabilité de l'événement E?
On lance le dé, 8100 fois, calculer la moyenne et l'écart-type du nombre d'arrivées de l'événement E.

- la probabilité de l'événement E est
$\mathbb{P}(E) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.
On considère l'épreuve à deux issues
- "succès" si E se produit c'est à dire on obtient 3 ou 6. Donc $p = \frac{1}{3}$.
- "échec" si E ne se produit pas c'est à dire on n'obtient ni 3 ni 6.
On répète l'épreuve 8100 fois. Soit la variable aléatoire X = "nombre d'arrivées de E ou nombre de succès ou nombre d'apparitions de 3 et 6".
X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\Big(8100, \dfrac{1}{3}\Big)$.

$$\text{Pour } k = 0,1,2,...,8100, \qquad \mathbb{P}(X=k) = C_n^k \Big(\frac{1}{3}\Big)^k \Big(\frac{2}{3}\Big)^{n-k}$$

$$E(X) = 8100 \times \frac{1}{3} = 2700$$

$$V(X) = 8100 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 1800$$

et

$$\sigma(X) = \sqrt{1800} = 30\sqrt{2}.$$

3.1.2 Loi multinomiale

Pour $s \geq 2$, on considère $(A_1, A_2, ..., A_s)$ un système complet d'événements, ainsi $\Omega = \cup_{i=1}^{s} A_i$.
On note $p_i = \mathbb{P}(A_i)$, $i \in \{1,2,...,s\}$ les probabilités de chacun de ces événements.
On effectue n épreuves répétées indépendantes à caractère multinomial. La probabilité pour que A_1 se produise k_1 fois, A_2 se produise k_2 fois,..., etA_s se produise k_s fois avec $k_1+k_2+...+k_n = n$ est :

$$\mathbb{P}(X_1 = k_1, X_2 = k_2, ..., X_s = k_s) = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_s!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_s^{k_s}$$

Remarque 3.1.2
Ce n'est pas une loi de probabilité d'une VARD.

Exemple 27
Les ampoules colorées produites par une usine sont rouges, bleues et vertes dans la proportion $50\%, 30\%$ *et* 20%*. A partir d'un échantillon de* 5 *ampoules, calculons la probabilité d'avoir deux rouges, deux bleues et une verte :*

$$\mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 1) = \frac{5!}{2!2!1!}0.5^2.0.3^2.0.2^1 = 0.027$$

3.1.3 Loi géométrique ou loi de Pascal

3.1.3.1 Cadre et énoncé de la loi géométrique

Il s'git d'une succession d'épreuves :
- Répétées n fois, avec $n \in \mathbb{N}^*$
- Identiques
- Indépendantes à caractère dichotomique, avec une proportion de succès $p \in]0, 1[$.

On s'intéresse ici au nombre k d'épreuves jusqu'au premier succès (succès compris dans le compte).

Par exemple, pour l'événement succession $EEEES$ on a $X = 5$.
On répète l'épreuve au moins une fois, éventuellement une infinité de fois, et on considère $\Omega = \{E, S\}^{\mathbb{N}^*}$

Définition 3.1.3
Soit X *une VARD suivant la loi géométrique (ou loi de Pascal) de paramètre* p : $X \sim \mathcal{G}(p)$ *avec* $p \in]0, 1[$*. Alors* $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$*. Cette loi est définie par :*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = q^{k-1}p$$

Cela définit bien une loi de probabilité, en effet :
$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) \geq 0$ et $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X = k) = p \sum_{k \in \mathbb{N}^*} q^{k-1} = \frac{p}{1-q} = 1.$

3.1.3.2 L'espérance et la variance

Proposition 3.1.3
Si $X \sim \mathcal{G}(p)$*, alors*
- $E(X) = \dfrac{1}{p}$.
- $V(X) = \dfrac{q}{p^2}$ *et* $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{q}}{p}$.

Démonstration 3

– $E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}k(1-p)^{k-1}p=-p\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^k\Big)'$

$=-p\Big(\frac{1}{p}\Big)'=-p\times\frac{-1}{p^2}$

ainsi $\boxed{E(X)=\frac{1}{p}}$

– $E(X^2)=\sum_{k=1}^{+\infty}k^2(1-p)^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{+\infty}k(k-1)(1-p)^{k-1}+p\sum_{k=1}^{+\infty}k(1-p)^{k-1}$

$=p(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty}k(k-1)(1-p)^{k-2}+\underbrace{p\sum_{k=1}^{+\infty}k(1-p)^{k-1}}_{=E(X)=\frac{1}{p}}$

$=p(1-p)\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^k\Big)''+\frac{1}{p}$

$=p(1-p)\Big(\frac{1}{p}\Big)''+\frac{1}{p}$

$=\frac{2-p}{p}$

Donc $V(X)=E(X^2)-E(X)=\frac{2-p}{p}-\Big(\frac{1}{p}\Big)^2$

$=E(X^2)-E(X)=\frac{1-p}{p^2}$

D'où $\boxed{V(X)=\frac{q}{p^2}}$ *et* $\boxed{\sigma(X)=\frac{\sqrt{q}}{p}}$.

Exemple 28

Dans une boîte, il y a n cartes numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs avec remise, jusqu'à obtenir la carte n. Soit X le nombre de tirages effectués. Quelle est la loi de X. Calculer la probabilité que le nombre de cartes tirées soit égal à x, pour x = 31.

Quelle est la probabilité que le nombre de cartes tirées soit inférieur ou égal à 50? Application : n = 100. On répète, de façon indépendante, la probabilité du succès (tirer la carte numéro n) est $p=\frac{1}{n}$*, jusqu'à l'obtention d'un succès.*

Le nombre de répétitions nécessaire à l'obtention d'un succès suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ *de paramètre p.*

$$\mathbb{P}(X=x)=p(1-p)^{x-1}=\frac{(n-1)^{x-1}}{n^x}$$

Donc $\mathbb{P}(X=31)=p(1-p)^{30}=\frac{(99)^{30}}{100^{31}}=0,0074.$

$\mathbb{P}(X\le 50)=1-\mathbb{P}(X>50)=1-\sum_{x=51}^{+\infty}\mathbb{P}(X=x)=1-\sum_{x=51}^{+\infty}p(1-p)^{x-1}$

$=1-p(1-p)^{50}\frac{1}{1-(1-p)}=1-(1-p)^{50}=1-\frac{(n-1)^{50}}{n^{50}}=1\frac{(99)^{50}}{100^{50}}=0,395$

3.1.4 Loi hypergéométrique

3.1.4.1 Cadre et énoncé da la loi hypergéométrique

Il s'agit d'une succession d'épreuves :
– Répétées n fois, où $n \in \mathbb{N}^*$,
– Identiques,
– Exhaustives (dépendantes) à caractère dichotomique.
On s'intéresse ici au nombre k de succès parmi ces n épreuves.

On tire sans remise n boules d'une urne contenant N boules indiscernables, où $N = N_1+N_2$ avec :
– $N_1 = N \times p$ boules blaches, où p est la proportion de boules blanches, $p \in [0,1]$
– $N_2 = N \times q$ boules noires, où $p + q = 1$.
X est la VARD prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées. Ω est l'ensemble des combinaisons ω de n boules tirées parmi les N, avec $0 \leq n \leq N$. $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un espace probabilisable avec équiprobabilité.
$card(\Omega) = C_N^n$, ainsi $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{C_N^n}$ pour un évènement élémentaire et $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.
En prenant k boules parmi N_1 blanches et $n-k$ parmi N_2 noires on a :

Définition 3.1.4
Soit X une VARD suivant la loi Hypergéométrique de paramètres N, n, p, on note $X \sim \mathcal{H}(N, n, p)$ avec :

$$\begin{cases} N = N \times p + N \times q : & \textit{taille de la population totale,} \\ n \quad : & \textit{taille de l'échantillon avec } 0 \leq n \leq N \\ p \in [0,1] \quad : & \textit{probabilité du succès, et } q = 1-p \end{cases}$$

$X(\Omega) = \Big[\sup(0, n - N \times q), \inf(N \times p, n)\Big]$ *et*

$$\forall k \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{C_{N_1}^k C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{C_{pN}^k C_{qN}^{n-k}}{C_N^n}$$

<u>Justification du support :</u> $\binom{N}{n} = \binom{N_1+N_2}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}$ car pour constituer un sous-ensemble à n éléments pris parmi $N = N_1 + N_2$, on en prend k parmi N_1 puis $n-k$ parmi N_2, où k varie de 0 à n.
On a $0 \leq k \leq N_1 = N \times p$, $k \leq n$, et $0 \leq n - k \leq N_2 = N \times q$.
Donc $\sup(0, n - N \times q) \leq k \leq \inf(N \times p, n)$

3.1.4.2 L'espérance et la variance

Proposition 3.1.4
Si $X \sim \mathcal{H}(N, n, p)$ alors
$\bullet E(X) = np$
$\bullet V(X) = npq\frac{N-n}{N-1}$

Démonstration 4

Rappelons que $k\binom{n}{k} = \dfrac{k \times n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n \times (n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$

• $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \times p_k = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} k.\binom{N.p}{k}\binom{N.q}{n-k} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} N.p.\binom{N.p-1}{k-1}\binom{N.q}{n-k}$

$$= \frac{N.p}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} \binom{N.p-1}{k-1}\binom{N.q}{n-k} = \frac{n.p}{\binom{N-1}{n-1}} \sum_{k=1}^{n} \binom{N.p-1}{k-1}\binom{N.q}{n-k}$$

$$= \frac{n.p}{\binom{N-1}{n-1}} \underbrace{\sum_{k'=0}^{n-1} \binom{N.p-1}{k'}\binom{N.q}{n-1-k'}}_{=\binom{N-1}{n-1}} = n.p \textit{ (Identité de Van Der Monde)}$$

• $V(X) = E(X^2 - X) + E(X) - E(X)^2.$

$$E(X^2 - X) = E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \times p_k$$

$$= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{n} k.(k-1)\binom{N.p}{k}\binom{N.q}{n-k}$$

$$= \frac{N.p}{\binom{N}{n}} \sum_{k=2}^{n} (k-1)\binom{N.p-1}{k-1}\binom{N.q}{n-k}$$

$$= \frac{N.p.(N.p-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{k=2}^{n} \binom{N.p-2}{k-2}\binom{N.q}{n-k}$$

$$= \frac{N.p.(N.p-1)}{\frac{N}{n}\frac{N-1}{n-1}\binom{N-2}{n-2}} \sum_{k=2}^{n} \binom{N.p-2}{k-2}\binom{N.q}{n-k}$$

$$= \frac{n.p.(N.p-1)}{\frac{N-1}{n-1}\binom{N-2}{n-2}} \sum_{k'=0}^{n-2} \binom{N.p-2}{k'}\binom{N.q}{n-2-k'}, \textit{ (en posant } k' = k-2\textit{)}$$

$$= \frac{n(n-1).p.(N.p-1)}{N-1}$$

ainsi on obtient

$$V(X) = \frac{n(n-1).p.(N.p-1)}{N-1} + n.p - (n.p)^2$$

$$= n.p\Big(\frac{N-1+(n-1).(N.p-1) - n.p.(N-1)}{N-1}\Big)$$

$$= n.p\Big(\frac{(N-n).(p-1)}{N-1}\Big) = n.p.q\frac{(N-n)}{N-1}$$

Remarque 3.1.3

$E(X_{\mathcal{H}(N,n,p)}) = E(X_{\mathcal{B}(n,p)})$ *et* $V(X_{\mathcal{H}(N,n,p)}) = V(X_{\mathcal{B}(n,p)}) \times \dfrac{N-n}{N-1}.$

Exemple 29

On prélève au hasard un échantillon de $n = 10$ pièces dans une production totale de $N = 1000$ pièces comportant en tout $M = 50$ pièces défectueuses.
Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement $k = 6$ pièces défectueuses dans l'échantillon ?
Soit X le nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon. Le nombre X de pièces défectueuses dans un échantillon de n pièces suit une loi hypergéométrique de paramètre N, n et M : ($X \sim$

$\mathcal{H}(N,n,M)$) donnée par :
$\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ *pour* $k \in \{0,1,...,10=\min(n,M)\}$
$\mathbb{P}(X=6) = \dfrac{C_{50}^6 C_{950}^4}{C_{1000}^{10}} = 2,3 \times 10^{-3}$

3.1.5 Loi de Poisson

La loi de poisson est une loi de probabilité qui s'applique aux événements rares, elle décrit aussi le nombre d'apparitions d'un événement pendant une duré de temps déterminée. Le nombre aléatoire X de ces événements suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ qui représente la moyenne d'événements survenus.

3.1.5.1 Cadre et énoncé de la loi de Poisson

Il s'agit d'une succession illimité d'épreuves :
- Répétées
- Identiques
- Indépendantes à caractère dichotomique, avec une proportion de succès p "petit", c'est-à-dire pour un phénomène rare.

On s'intéresse ici au nombre k de succès sur un nombre illimité d'épreuves.

Définition 3.1.5
Soit Xune VARD suivant la loi de Poisson de paramètre réel $\lambda > 0$, on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Cette loi est définie par :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \textit{ avec } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=k) = p_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $p_k > 0$ et $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k = e^{-\lambda}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$. Cela définit bien une loi de probabilité.

3.1.5.2 L'espérance et la variance

Proposition 3.1.5
Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors
- $E(X) = \lambda$
- $V(X) = \lambda$ *et* $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.

Démonstration 5

- $$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{+\infty} k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \end{aligned}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

Donc $\boxed{E(X) = \lambda}$

– $V(X) = E[(X(X-1) + X] - E(X)^2 = E[(X(X-1)] + E(X) - E(X)^2$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} + E(X) - E(X)^2$$
$$= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} + E(X) - E(X)^2$$
$$= e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + E(X) - E(X)^2$$
$$= e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k}}{(k)!} + E(X) - E(X)^2$$
$$= e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} + E(X) - E(X)^2$$
$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

d'où $\boxed{V(X) = \lambda}$ *et* $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{\lambda}}$.

Exemple 30

Une machine utilisée dans une chaîne de production tombe en panne en moyenne 2 fois par mois. Soit X le nombre de pannes par mois. Quelle est la probabilité que dans un mois donné la machine ne tombe pas en panne ?, tombe en panne au moins deux fois ?

X suit la loi de poisson de paramètre $\lambda = 2$, $X \sim \mathcal{P}(2)$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{2^k e^{-2}}{k!}$.

La machine ne tombe pas en panne donc $k = 0$ *et la probabilité est*

$\mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{2^0 e^{-2}}{0!} = e^{-2} = 0,135.$

La machine tombe en panne au moins deux fois donc k = 2 et la probabilité est :

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X < 2) = 1 - (\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1))$$
$$= 1 - \left(\frac{2^0 e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 e^{-2}}{1!}\right) = 1 - (e^{-2} + 2e^{-2}) = 1 - 0,405 = 0,595.$$

3.1.6 Tableaux des lois de probabilités discrètes

Loi	Densité de probabilité	Espérance	Variance
Binomiale	$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$	np	$np(1-p)$
Multinomiale	$\mathbb{P}(X_1 = k_1, ..., X_n = k_n)) = \dfrac{n!}{k_1! k_2! .... k_n!} p_1^{k_1} ... p_n^{k_n}$ $k_i \in \{0, 1, ..., n\}$ et $k_1 + ... + k_n = 1$		
Géométrique	$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Hypergéométrique	$\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{C_{pN}^k C_{qN}^{n-k}}{C_N^n}$ $\sup(0, n - N \times q) \leq k \leq \min(n, N \times p)\}$	np	$npq\frac{N-n}{N-1}$
Poisson	$\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ pour $\lambda \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}$	λ	λ

3.2 Lois continues

3.2.1 Loi uniforme

3.2.1.1 Définition

Définition 3.2.1
Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On dit qu'une VARC X suit la loi uniforme sur $[a, b]$, si elle admet une fonction densité de probabilité f définie par

$$f : x \longmapsto \begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{b-a} & \textit{si } x \in [a,b], \\ f(x) = 0 & \textit{si } x \notin [a,b] \end{cases}$$

On note $X \sim \mathcal{U}([a, b])$, avec $X(\Omega) = [a, b]$.

f définit bien une densité de probabilté car :
- f est positive sur $\mathbb{R}$
- f est continue sur $\mathbb{R} - \{a, b\}$
- f est sommable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$

3.2.1.2 Fonction de répartition

La fonction de répartition est $F : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \end{cases}$

On a ansi $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$

3.2.1.3 Principaux paramètres

Theorème 3.2.1
Si $X \sim \mathcal{U}([a, b])$, alors
- $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$
- $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$ *et* $\sigma(X) = \dfrac{(b-a)\sqrt{3}}{6}$

Démonstration 6
- $E(X) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{2(b-a)}\Big[x^2\Big]_a^b = \frac{a+b}{2}$
- $E(X^2) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3(b-a)}\Big[x^3\Big]_a^b = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2) - \Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{12}(a^2 - 2ab + b^2) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Enfin $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \dfrac{(b-a)}{\sqrt{12}} = \dfrac{(b-a)\sqrt{3}}{6}.$

3.2.2 Loi exponentielle

3.2.2.1 Définition

Définition 3.2.2

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle (négative) de paramètre λ où $\lambda > 0$, si elle admet une fonction densité de probabilité f définie par

$$f(x) = \begin{cases} f(x) = \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ f(x) = 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

On note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, avec $X(\Omega) = [0, +\infty[$.

f définit bien une densité de probabilité car :

- f est positive sur $\mathbb{R}$
- f est continue sur $\mathbb{R}^*$
- f est sommable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$

En effet $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \lambda e^{-\lambda t} dt$

$$= \lim_{A \to +\infty} \Big[-e^{-\lambda t} \Big]_0^A = \lim_{A \to +\infty} \Big(1 - e^{-\lambda A} \Big) = 1, \text{ car } \lambda > 0.$$

3.2.2.2 Fonction de répartition

La fonction de répartition est donnée par : $F : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \end{cases}$

On a ansi $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \displaystyle\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \Big[-e^{-\lambda t} \Big]_0^x = 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

F est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et de classe C^∞ par morceaux.

3.2.2.3 Principaux paramètres

Theorème 3.2.2

Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors

- $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$
- $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$, *et* $\sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

Démonstration 7

- $E(X) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx$ *qu'on intègre par parties :*

$$\int_0^A xe^{-\lambda x}dx = \Big[\frac{xe^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big]_0^A + \frac{1}{\lambda}\int_0^A e^{-\lambda x}dx = -\frac{Ae^{-\lambda A}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\Big[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big]_0^A$$
$$= \frac{1}{\lambda^2} - \frac{Ae^{-\lambda A}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda A}}{\lambda^2} \longrightarrow \frac{1}{\lambda^2},\ \textit{quand } A \longrightarrow +\infty.$$

D'où $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

. $E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x}dx$. *On intègre deux fois par parties :*

$$\int_0^A x^2e^{-\lambda x}dx = \Big[\frac{x^2e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big]_0^A + \frac{2}{\lambda}\int_0^A xe^{-\lambda x}dx$$
$$= -\frac{A^2e^{-\lambda A}}{\lambda} + \frac{2}{\lambda}\Big(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{Ae^{-\lambda A}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda A}}{\lambda^2}\Big) \longrightarrow \frac{2}{\lambda^3}$$

Donc $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$ *et par conséquent*

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \Big(\frac{1}{\lambda}\Big)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

Enfin $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{\lambda}$.

3.2.2.4 Loi Gamma

Soient $\lambda > 0$ et $a > 0$. Une variable aléatoire X suit la loi de Gamma de paramètre (a, λ) si elle admet pour densité la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1}e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

avec $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$.

On écrit $X \sim \Gamma(a, \lambda)$.

3.2.2.5 Principaux paramètres

Theorème 3.2.3

Si $X \sim \Gamma(a, \lambda)$ *alors*

• $E(X) = \frac{a}{\lambda}$

• $V(X) = \frac{a}{\lambda^2}$

Démonstration 8

• *Par changement de variable* $y = \lambda x$, *on a*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^a e^{-\lambda x}dx$$
$$= \frac{\lambda^a}{\lambda\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)^a e^{-y}dy = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}\frac{y^a e^{-y}}{\lambda^{a+1}}dy$$
$$= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(a+1)}{\lambda^{a+1}} = \frac{a}{\lambda} \qquad \textit{car } \Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

• *Par le même changement de variable* $y = \lambda x$, *on a*

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a+1} e^{-\lambda x} dx$$
$$= \frac{\lambda^a}{\lambda^{a+2}\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} y^{a+1} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(a+2)}{\lambda^2 \Gamma(a)} = \frac{a(a+1)}{\lambda^2}$$
Donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{a}{\lambda^2}$.

Remarque 3.2.1
Lorsque $a = 1$, *la loi* $\Gamma(1, \lambda)$ *est la loi exponentielle de paramètre* λ, $\mathcal{E}(\lambda)$

3.2.3 Loi normale

3.2.3.1 Définition

Définition 3.2.3
Soit $m \in \mathbb{R}$ *et* $\sigma > 0$. *On dit qu'une VARC* X *suit une loi normale de paramètres* m *et* σ^2, *si elle admet une fonction de densité de probabilité* f *telle que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2}$$

On note $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, *avec* $X(\Omega) = \mathbb{R}$.

Sa représentation graphique est

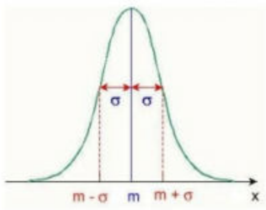

Figure 4.1 – Courbe de la densité de la loi normale

f définit bien une densité de probabilité car :
- f est positive sur $\mathbb{R}$
- f est continue sur $\mathbb{R}$
- f est sommable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$

En effet , $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2} dx$.
Par le changement de variable : $t = \frac{x-m}{\sigma} \Longleftrightarrow x = \sigma t + m$, avec $dx = \sigma dt$ on obtient :
$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dx = 1$. car $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dx = \sqrt{2\pi}$ (Intégrale de Gauss).
On remarque que la courbe est symétrique et admet pour axe de symétrie la droite $x = m$.
Lorsque $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$ on l'appelle la loi normale standard ou la loi centré réduite $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (centré $m = E(X) = 0$, réduite $V(X) = 1$).

Propriété 3.2.1
Soient $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $a, b \in \mathbb{R}$ alors on a :
• $Y = aX + b \sim \mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$.
• $Z = \dfrac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$
• $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ *alors* $X = \sigma Z + m \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

3.2.3.2 Principaux paramètres

Theorème 3.2.4
• *Si* $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, *alors* $E(X) = m$ *et* $V(X) = \sigma^2$
• *Si* $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, *alors* $E(X) = 0$ *et* $V(X) = 1$

3.2.3.3 Table de la loi normale standard

La loi normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$ est tabulée. La table donne les valeurs des probabilités $\mathbb{P}(X \leq x)$ pour différents valeurs de x.
Nous savons que si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $Z = \dfrac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. La densité de Z est donnée par :

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \ \forall t \in \mathbb{R}$$

et sa fonction de répartition Φ est donnée par la formule : $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \ \forall x \in \mathbb{R}$.

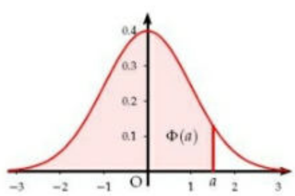

FIGURE 4.2 – Courbe de la densité de la loi normale standard

Puisque la courbe est symétrique, on a l'identité : $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.
La table suivante donne pour tout x de 0 jusqu'à 2.99 par pas de 0.01, la valeur de $F(x)$. L'entrée en ligne donne les deux premiers chiffres de x, c'est-à-dire le chiffre des unités et celui des dixièmes, et l'entrée en colonne le chiffre des centièmes.
Par exemple : $\Phi(1,73) = \mathbb{P}(X \leq 1,73) = 0,95818$,
$\Phi(-1,54) = 1 - \Phi(1,54) = 1 - 0,93822 = 0,06178$.

Table de la loi normale centrée réduite

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0,0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0,1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0,2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0,3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0,4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0,5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0,6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0,7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0,8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0,9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1,0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1,1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1,2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1,3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1,4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1,5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1,6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1,7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1,8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1,9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2,0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2,1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2,2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2,3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2,4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2,5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2,6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2,7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2,8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2,9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861

Table pour les grandes valeurs de x

x	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3.8	4.0	4.5
$\Phi(x)$	0.99865	0.99903	0.99931	0.99952	0.99966	0.99977	0.99984	0.99993	0.99996	0.99999

3.2.4 Loi de Khi-deux

3.2.4.1 Définition

Définition 3.2.4
Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables aléatoires normales standards ($X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\forall i \in \{1,2,...,n\}$) indépendantes.
On dit que la VARC $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit la loi de Khi-deux à n degrés de libertés, on note $X \sim \chi_2(n)$, si sa densité de probabilté est définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & si\ x \geq 0 \\ \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

3.2.4.2 Principaux paramètres

Theorème 3.2.5
Si $X \sim \chi_2(n)$ *alors*
• $E(X) = 2.$
• $V(X) = 2n.$

3.2.5 Loi de Student

3.2.5.1 Définition

Définition 3.2.5
Soient X *une variable aléatoire standard* ($X \sim \mathcal{N}(0,1)$), Y *une variable aléatoire indépendantes de* X *ayant la loi de Khi-deux* ($Y \sim \chi_2(n)$) *et* $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$.
On dit que la VARC T *suit la loi de Student à* n *degrés de libérté si sa densité de probabilité est définie par :*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \Big(1 + \frac{x^2}{n}\Big)^{-\frac{n+1}{2}}, x \in \mathbb{R}.$$

On écrit $T \sim \mathcal{T}(n)$

3.2.5.2 Principaux paramètres

Theorème 3.2.6
Si $T \sim \mathcal{T}(n)$ *alors*
• $E(T) = 0.$
• $V(T) = \dfrac{n}{n-2}.$

3.2.6 Loi de Ficher-Snedecor

3.2.6.1 Définition

Définition 3.2.6
Soient X *et* Y *deux variables aléatoires indépendantes ayant la loi de khi-deux à réspectivement* n *et* m *degrés de liberté* ($X \sim \chi_2(n)$, $Y \sim \chi_2(m)$).
La variable aléatoire $F = \frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}}$ *suit la loi de Fisher-Snedecor à* (n,m) *degrés de liberté si sa densité de probabilité est définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}} \dfrac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(nx+m)^{\frac{n+m}{2}}} & si\ x \geq 0 \\ \\ 0 \quad si\ x < 0 \end{cases}$$

On écrit $F \sim \mathcal{F}(n,m)$

3.2.6.2 Principaux paramètres

Theorème 3.2.7
Soit $F \sim \mathcal{F}(n,m)$*, alors on a :*
- $E(F) = \dfrac{m}{m-2}$ *si* $m > 2$.
- $V(F) = \dfrac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}$ *si* $m > 4$.

3.2.7 Tableaux des lois de probabilités continues

Loi	Densité de probabilité	Espérance	Variance
Uniforme	$f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ avec $a \leq x \leq b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$ et $\lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gamma	$f(x) = \dfrac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}$ pour $x > 0, \lambda > 0$ et $a > 0$	$\frac{a}{\lambda}$	$\frac{a}{\lambda^2}$
Normale	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ pour $x \in \mathbb{R}$	m	σ^2
Khi-deux	$f(x) = \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$	n	$2n$
Student	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}} \dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} (1 + \dfrac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$	0	$\frac{n}{n-2}$
Fisher	$f(x) = n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}} \dfrac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(nx+m)^{\frac{n+m}{2}}}, x \in \mathbb{R}$	$\dfrac{m}{m-2}$ si $m > 2$	$\dfrac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}$ si $m > 4$